BARISAN DAN DERET

Nurdinintya Athari (NDT)

BARISAN

- **Definisi**

  Barisan bilangan didefinisikan sebagai fungsi dengan daerah asal merupakan bilangan asli.

  Notasi: f: N → R

  $n \mapsto f(n) = a_n$

  Fungsi tersebut dikenal sebagai *barisan bilangan riil* $\{a_n\}$ dengan a_n adalah suku ke-n.

- Bentuk penulisan dari barisan :
  1. bentuk *eksplisit* suku ke-n
  2. ditulis barisannya sejumlah berhingga suku awalnya.
  3. bentuk rekursi

  Contoh: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots\right\}$ $\quad a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$

KEKONVERGENAN BARISAN

- *Definisi:*

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **konvergen** menuju L atau berlimit L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Jika untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Sebaliknya, barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan **divergen**.

CATATAN

- Akan kita jumpai banyak persoalan konvergensi barisan. Kita akan menggunakan fakta berikut.

Jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, maka $\lim_{n \to \infty} f(n) = L$

Fakta ini memudahkan karena kita dapat memakai kaidah l'Hospital untuk soal peubah kontinu.

SIFAT LIMIT BARISAN

- Sifat dari limit barisan, jika barisan $\{a_n\}$ konvergen ke L dan barisan $\{b_n\}$ konvergen ke M, maka

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = L \pm M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) . \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = L.M$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)} = \dfrac{L}{M}$, untuk $M \neq 0$

- Barisan $\{a_n\}$ dikatakan

a. Monoton naik bila $a_{n+1} \geq a_n$
b. Monoton turun bila $a_{n+1} \leq a_n$

CONTOH

Tentukan konvergensi dari barisan di bawah ini:

1. $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$

Jawab:

Ambil : $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

Dalam hal ini, menurut kaidah l'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

artinya barisan a_n konvergen menuju ½.

CONTOH

2. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Jawab:

Ambil $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Dalam hal ini, menurut kaidah l'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-\left(\frac{1}{x}\right)^2 . \left(\frac{x}{x+1}\right)}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right) = e^1 = e$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e$$

artinya barisan a_n konvergen menuju e.

LATIHAN

Tentukan konvergensi dari barisan di bawah ini:

1. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2-2n+3}$
2. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{n+1}$
3. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$
4. $a_n = \dfrac{(-\pi)^n}{4^n}$
5. $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$
6. $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2} a_n$, $a_1=1$
7. $\left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5} \ \ldots \right\}$
8. $\left\{ -1, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}, -\dfrac{5}{9} \ \ldots \right\}$
9. $\left\{ 1, \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}, \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} \ \ldots \right\}$
10. $\left\{ \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}, \dfrac{2}{3-\frac{1}{3}}, \dfrac{3}{4-\frac{1}{4}}, \dfrac{4}{5-\frac{1}{5}} \ \ldots \right\}$

DERET TAK HINGGA

Bentuk deret tak hingga dinotasikan dengan notasi sigma, sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

dengan a_n adalah suku ke-n.

BARISAN JUMLAH PARSIAL

Misalkan S_n menyatakan jumlah parsial ke-n suku deret $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, maka

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Barisan $\{S_n\}$, dinamakan barisan jumlah parsial deret $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Dari jumlah parsial ini di dapat bahwa $S_n - S_{n-1} = a_n$.

KEKONVERGENAN DERET TAK HINGGA

Deret tak hingga $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ***konvergen*** dan mempunyai jumlah S

jika barisan jumlah-jumlah parsialnya $\{S_n\}$ ***konvergen*** ke S.

Sebaliknya, apabila $\{S_n\}$ ***divergen*** maka deret ***divergen.***

DERET GEOMETRI

- Bentuk umum deret geometri adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} + \ldots$$

dengan $a \neq 0$.

- Jumlah parsial deret ini adalah

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1}$$

dan dapat ditulis sebagai $S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r},\ r \neq 1.$

SIFAT DERET GEOMETRI

1. Jika $|r| < 1$ maka barisan {r^n} konvergen ke 0 karena

   $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, maka deretnya konvergen ke $\dfrac{a}{1-r}$

2. Jika $|r| > 1$ maka barisan {r^n} divergen karena $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$,

   maka deretnya juga divergen.

CONTOH [1] (SELIDIKI KEKONVERGENANNYA)

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ . \ . \ .$

Jawab:
Kalau kita perhatikan

$$S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1-(\frac{1}{2})^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1-(\frac{1}{2})^3$$

Sehingga kita peroleh jumlah parsial ke-n-nya

$$S_n = 1-(\frac{1}{2})^n$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-(\frac{1}{2})^n) = 1$$

Jadi karena barisan jumlah-jumlah parsialnya konvergen ke 1, maka deret di atas juga konvergen.

CONTOH [2]

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ (Deret Kolaps)

Jawab:
Kalau kita perhatikan

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Dari sini kita peroleh bahwa jumlah parsial ke-n-nya

$$S_n = \left(1 - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right) + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}}\right) + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\right) + \quad . \quad . \quad . + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Dan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Jadi karena barisan jumlah parsialnya konvergen ke 1, maka deret di atas juga konvergen.

CONTOH [3]

3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ (Deret Harmonik)

Jawab:
Dari sini kita dapatkan

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \quad . \ . \ . + \frac{1}{n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \quad . \ . \ . + \frac{1}{n}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \quad . \ . \ . + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \quad . \ . \ . + \frac{1}{n}$$

Sehingga akan kita dapatkan limit untuk S_n untuk n menuju tak hingga harganya adalah tak hingga juga. Jadi deret harmonik di atas adalah deret divergen.

UJI KEDIVERGENAN DENGAN SUKU KE-N

Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

ekivalen $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka deret divergen.

Catatan:

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka belum tentu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deret konvergen

(bisa konvergen atau divergen) sehingga perlu pengujian deret positif.

UJI KEDIVERGENAN DENGAN SUKU KE-N

Contoh:

Buktikan bahwa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4}$ divergen.

Bukti :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}$$ (Tidak Nol)

Jadi terbukti bahwa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4}$ divergen.

MASALAH BARU

Dalam banyak kasus bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tetapi dari sini kita sangat sulit menentukan apakah deret tersebut konvergen atau divergen.

Sebagai contoh deret harmonik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \; . \; . \; . + \frac{1}{n} + \ldots$$

Jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tetapi deret harmonik adalah deret yang divergen.

Oleh karena itu, perlu dilakukan uji-uji untuk deret positif.

UJI DERET POSITIF

1. Tes Integral

Misalkan fungsi f kontinu monoton turun dan f(x) > 0 pada selang $[1,\propto)$

a. Jika integral tak wajar $\int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergen.

b. Jika integral tak wajar $\int_1^\infty f(x)\ dx$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergen.

CONTOH

1. Selidiki kekonvergenan dari $\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-n^2}$

Jawab:

Kita ambil $f(x) = x\,e^{-x^2}$, sehingga

$$\int_1^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x\,e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x^2}\,d(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{b^2}-e^{1}} = \frac{1}{2e}$$

Jadi karena $\int_1^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-n^2}$ juga konvergen.

CONTOH

2. Selidiki kekonvergenan dari $\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n} \ln \mathrm{n}}$

Jawab:

Kita ambil $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, sehingga

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \ln(\ln x) = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty$$

Jadi karena $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ divergen, maka $\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n} \ln \mathrm{n}}$ juga divergen.

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$$

2. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+3n)^{\frac{3}{2}}}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}$$

UJI DERET POSITIF

2. Uji Deret - P

Deret-p atau deret hiperharmonik mempunyai bentuk umum

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

Dengan menggunakan tes integral, kita dapatkan

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}-1}{1-p}$$

Kalau kita perhatikan, untuk

1. p = 1 diperoleh deret harmonik, sehingga untuk p = 1 deret divergen.
2. p > 1 maka $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$, sehingga diperoleh deret yang konvergen.

UJI DERET POSITIF

3. p < 1 maka $\lim_{t \to \infty} t^{1-p}$ =∞, sehingga diperoleh deret yang divergen.

4. p < 0, suku ke-n deret $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^P}$, yaitu, $\frac{1}{n^P}$ tidak menuju 0.

   Jadi deret divergen menurut Uji Suku ke-n

Sehingga dapat kita simpulkan untuk uji deret-p, yaitu:

1. Deret-p konvergen apabila p > 1
2. Deret-p divergen apabila $0 \leq p \leq 1$

CONTOH

Apakah deret berikut konvergen atau divergen?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,001}}$

   Berdasarkan uji deret-p, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,001}}$ konvergen karena p = 1,001 > 1

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

   Berdasarkan uji deret-p, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ divergen karena p = ½ < 1

UJI DERET POSITIF

3. Tes Perbandingan dengan deret lain

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deret positif, jika $a_n \le b_n$ maka

1. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
2. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen

CONTOH

Selidiki Kekonvergenan deret berikut:

1. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-5}$

Jawab:

Akan kita bandingkan deret ini dengan $a_n = \frac{1}{n}$ dan $b_n = \frac{n}{n^2-5}$,

kita tahu bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah deret harmonik dan

$\frac{n}{n^2-5} \geq \frac{1}{n}$, sehingga karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ deret divergen, maka

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-5}$ deret yang divergen.

CONTOH

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

Jawab:

Akan kita bandingkan deret ini dengan $b_n = \frac{1}{n^2}$ dan $a_n = \frac{1}{n^2+5}$

kita tahu bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ adalah deret hiperharmonik dengan

p = 2 >1 dan $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+5}$, Sehingga karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ deret

konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ deret yang konvergen.

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan deret berikut

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$$

2. $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-5}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$$

4. $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

UJI DERET POSITIF

4. Tes Banding limit

Andaikan a_n dan b_n deret positif dan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

1. Jika $0 < L < \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sama-sama konvergen atau divergen

2. Jika $L = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

CONTOH

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 - 5n^2 + 7}$

Jawab:

Kita gunakan Uji Banding Limit. Kalau kita perhatikan deret tersebut, suku umumnya mirip dengan $b_n = \frac{1}{n^2}$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3 \big/ n^3 - 5n^2 + 7}{1 \big/ n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2}{n^3 - 5n^2 + 7} = 2$$

Jadi karena L = 2 dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 - 5n^2 + 7}$ konvergen.

CONTOH

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut :

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$

Jawab:

Kita gunakan Uji Banding Limit. Kalau kita perhatikan deret tersebut, suku umumnya mirip dengan $b_n = \frac{1}{n}$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n^2+4}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+4}} = 1$$

Jadi karena L=1 dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ divergen.

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n^2}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3 - 4}$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

UJI DERET POSITIF

5. Tes Hasil Bagi

Diketahui $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan suatu deret dengan suku-suku yang positif.

Misalkan $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho$

1. Jika ρ < 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen
2. Jika ρ > 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen
3. Jika ρ = 1 maka uji deret ini tidak dapat dilakukan.

CONTOH

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Jawab:

Misalkan suku ke-n adalah $a_n = \frac{3^n}{n!}$, maka suku ke-n+1 adalah $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

Karena nilai limit r = 0 (< 1), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ konvergen

CONTOH

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

Jawab:

Misalkan suku ke-n adalah $a_n = \frac{3^n}{n^2}$, maka suku ke-n+1 adalah $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}/(n+1)^2}{3^n/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n^2}{3^n (n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} = 3$$

Karena nilai limit r = 3 (> 1), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ divergen

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{n!}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$$

UJI DERET POSITIF

6. Tes Akar

Diketahui $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan suatu deret dengan suku-suku yang positif, misalkan $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a$

1. Jika a< 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen
2. Jika a> 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen
3. Jika a = 1 maka uji deret ini tidak dapat dilakukan.

CONTOH

Selidiki kekonvergenan deret

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$

Jawab:

Misalkan suku ke-n adalah $a_n = \left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$

maka nilai limitnya adalah

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n-1} = 2$$

Karena nilai limit r = 2 (> 1), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$ divergen

CONTOH

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$

Jawab:

Misalkan suku ke-n adalah a_n = $\left(\dfrac{n+2}{2n-1}\right)^n$

maka nilai limitnya adalah

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

Karena nilai limit r = ½ (< 1), maka deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$ konvergen

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^{n}$

DERET GANTI TANDA DAN KEKONVERGENAN MUTLAK

- ***Deret Ganti Tanda***

  Deret ini mempunyai bentuk sebagai berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ ...$$

dengan $a_n > 0$, untuk semua n.

Contoh penting adalah deret harmonik berganti tanda, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

UJI DERET GANTI TANDA

Andaikan deret ganti tanda, deret tersebut dikatakan konvergen jika

1. $a_{n+1} < a_n$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Contoh

Tentukan kekonvergenan deret ganti tanda berikut

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$
2. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots$

CONTOH

1. Jawab (uji ganti tanda)

Dari soal diatas kita punya $a_n = \frac{1}{n}$, dan $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, deret tersebut konvergen jika

a. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$

b. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Karena a dan b terpenuhi maka deret di atas konvergen.

CONTOH

2. Jawab (uji ganti tanda)

Dari soal diatas kita punya $a_n = \frac{1}{n!}$, dan $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

deret tersebut konvergen jika

a. $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n+1 > 1 \quad \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$$

b. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Karena a dan b terpenuhi maka deret di atas konvergen.

LATIHAN

Selidiki kekonvergenan dari deret ganti tanda berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n+3}{n^2+n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{3^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

KONVERGEN MUTLAK DAN KONVERGEN BERSYARAT

Suatu deret dikatakan konvergen mutlak bila harga mutlak deret tersebut konvergen.

Atau dengan kata lain :

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dikatakan konvergen mutlak jika $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergen.

Dan dikatakan konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ divergen, tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen.

PENGUJIAN KEKONVERGENAN MUTLAK

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan $a_n \neq 0$ dan $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$

Maka

1. Jika r < 1, maka deret konvergen mutlak
2. Jika r > 1, maka deret divergen
3. Jika r = 1, maka tes gagal

CONTOH

Selidiki deret berikut konvergen bersyarat, konvergen mutlak atau divergen

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$

Jawab:

Dari soal diatas kita memiliki $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$, dan $a_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

sehingga

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+2}\,2^{n+1}/(n+1)!\right|}{\left|(-1)^{n+1}\,2^{n}/(n)!\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\,n!}{2^n\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

Menurut uji hasil bagi mutlak, deret ini konvergen mutlak

CONTOH

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Jawab:

Dengan uji deret ganti tanda deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergen

(buktikan!!), sedangkan $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ adalah deret divergen

(karena merupakan deret-p dengan p= ½ < 1)

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ adalah konvergen bersyarat.

LATIHAN

Selidiki apakah deret tersebut konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{5^n}\right)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$$

DERET PANGKAT

Deret pangkat secara umum ada dua bentuk

1. Deret pangkat dalam x didefinisikan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

2. Deret pangkat dalam (x – b) didefinisikan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1 (x-b) + a_2 (x-b)^2 + \ldots$$

Untuk kali ini kita bicara selang kekonvergenan / untuk harga x berapa saja deret pangkat tersebut konvergen.

SELANG KEKONVERGENAN

Selang kekonvergenan ditentukan dengan uji hasil bagi mutlak sebagai berikut:

Misalkan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ dan $L = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-b)^{n+1}}{a_n(x-b)^n}\right|$

1. Jika L < 1, maka deret konvergen.
2. Jika L = 1, tidak dapat diambil kesimpulan → gunakan uji deret sebelumnya.

SOAL

Tentukan selang kekonvergenan deret

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$
2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$
3. $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\,x^n$$

JAWAB [1]

1. Kita akan gunakan Uji Hasil Bagi Mutlak, untuk menyelidiki kekonvergenan mutlak.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} : \frac{x^n}{(n+1)2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\frac{(n+1)}{(n+2)}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$$

Jadi deret tersebut konvergen mutlak apabila L< 1, yaitu –2 < x < 2
Kemudian akan kita cek untuk titik ujung intervalnya, yaitu x = 2 atau x = -2 .

- Pada x = 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$$

deret ini adalah deret harmonik yang divergen.

JAWAB [2]

- Pada x = –2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

deret ini adalah deret harmonik berganti tanda yang konvergen.

Sehingga selang kekonvergenannya adalah $-2 \leq x < 2$

JAWAB [3]

2. Kita akan gunakan Uji Hasilbagi Mutlak, untuk menyelidiki kekonvergenan mutlak.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)!} : \frac{x^n}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+2)}\right| = 0$$

Karena L = 0 < 1, maka deret selalu konvergen untuk semua nilai x.

Jadi selang kekonvergenannya adalah $(-\infty,\infty)$

JAWAB [4]

3. Kita akan gunakan Uji Hasilbagi Mutlak, untuk menyelidiki kekonvergenan mutlak.

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+2)!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,x^{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| (n+2)\,x \right| = \begin{cases} 0, & jika \quad x = 0 \\ \infty, & jika \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Jadi deret tersebut konvergen hanya untuk $x = 0$.

TEOREMA 1

Himpunan kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut:

1. satu titik $x = 0$
2. selang (-c, c), mungkin ditambah salah satu atau keduanya titik ujungnya.
3. seluruh himpunan bilangan riil

TEOREMA 2

Himpunan kekonvergenan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut :

1. satu titik $x = b$
2. selang (b-c, c+b), mungkin ditambah salah satu atau keduanya titik ujungnya.
3. seluruh himpunan bilangan riil

LATIHAN

Tentukan selang kekonvergenan deret pangkat berikut:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$$

2. $$\frac{(x+2)^2 \ln 2}{2.9} + \frac{(x+2)^3 \ln 3}{3.27} + \frac{(x+2)^4 \ln 4}{4.81} + \ldots$$

3. $$(x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \ldots$$

OPERASI DERET PANGKAT

Dalam pasal sebelumnya untuk $-1 < x < 1$ deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \frac{a}{1-x}$$

Pertanyaan yang muncul mengenai sifat-sifat deret kuasa di atas (misal $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n$) misalkan bagaimana jika $S(x)$ didiferensialkan dan jika $S(x)$ diintegralkan.

TEOREMA

- Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang I, jadi

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

maka : $1.\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D\left[a_n x^n\right] = d\,[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots]$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}$$

$$2.\ \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

CONTOH

Sesuai teorema di atas,

$\frac{1}{1-x}$ = 1 + x + x^2 + x^3 + . . . untuk -1< x <1

Tentukan: a. $\frac{1}{(1-x)^2}$ b. ln(1 – x)

Jawab:

a. Dengan menurunkan suku demi suku, kita peroleh

$$D_x\left(\frac{1}{1-x}\right)=D_x\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1},\ -1<x<1$$

CONTOH

b. ln (1 – *x*)

Sedangkan dengan mengintegralkan suku demi suku, kita peroleh juga

$$-\ln(1-x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt=\int_0^x 1+t+t^2+t^3+\ldots\,dt$$

$$=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\ldots\Big|_0^x=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots$$

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}x^n,\quad -1<x<1$$

LATIHAN

Tentukan (Petunjuk : Lihat contoh a dan b di atas)

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} = x^2 \, \dfrac{1}{1+x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
5. $f(x) = \tan^{-1} x$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
7. $f(x) = \dfrac{1}{(2+3x)}$

DERET TAYLOR DAN DERET MACLURIN

Deret Taylor

- Definisi: Misalkan *f*(*x*) dapat diturunkan sampai n kali pada *x*=b, maka *f*(*x*) dapat diperderetkan menjadi deret kuasa dalam bentuk

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n = f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)(x-b)^2}{2!}+\dots$$

deret di atas disebut **<u>Deret Taylor</u>** dengan pusat *x* = b.

Bila b = 0, kita peroleh **Deret Mac Laurin**, yaitu

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)\,x^2}{2!}+\dots$$

CONTOH

Perderetkan fungsi berikut dengan deret maclaurin:

1. f(x)= sin x

   Jawab:

$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0$

$f\,'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$

$f\,''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$

$f\,'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \rightarrow f^{IV}(0) = 0$

Sehingga,

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

CONTOH

2. $f(x) = e^x$

Jawab:

$f(x) = e^x$ → $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ → $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ → $f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x$ → $f'''(0) = 1$

$f^{IV}(x) = e^x$ → $f^{IV}(0) = 1$

Sehingga,

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

CONTOH

3. Perderetkan $f(x)= e^x$ dengan deret taylor dengan pusat di x=1

Jawab:

$f(x) = e^x$ → $f(1) = e$

$f'(x) = e^x$ → $f'(1) = e$

$f''(x) = e^x$ → $f''(1) = e$

$f'''(x) = e^x$ → $f'''(1) = e$

$f^{IV}(x) = e^x$ → $f^{IV}(1) = e$

Sehingga,

$$f(x) = e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + e\frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} e\frac{(x-1)^n}{n!}$$

LATIHAN

1. Perderetkan dengan $f(x)$ berikut deret maclaurin

a. $f(x) = \cos x$

b. $f(x) = \cos x^2$

c. $f(x) = \cos^2 x$

d. $f(x) = e^x + \sin x$

e. $f(x) = \sin^2 x$

f. $f(x) = \sec x$

g. $f(x) = \tan x$

h. $f(x) = \sec x$

2. Perderetkan dengan $f(x)$ berikut deret taylor dengan pusat $x = a$

a. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$

b. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/3$

a. $f(x) = e^x$, $a = 2$